黒木玄 Gen Kuroki
@genkuroki

第 i 成分だけが 1 で他の成分が 0 の n 次元列(縦)ベクトルを e_i と書く。
$n\times n$ 行列 A の第 j 列を e_i で置き換えたものを A_{ij} と書き、$\Delta_{ij}=|A_{ij}|$ とおく。行列式の多重線形性と交代性より、

$$\sum_{i=1}^n \Delta_{ij}a_{ik}=|A|\delta_{jk}.$$

$n\times n$ 行列 Δ を $\Delta=[\Delta_{ij}]$ と定める。このとき

$$\Delta^\mathsf{T} A=|A|E.$$

A の第 i 行を e_j^T で置き換えたものの行列式も Δ_{ij} に等しいので、同様にして

$$A\Delta^\mathsf{T}=|A|E$$

も示せる。ゆえに $|A|\ne 0$ ならば A の逆行列が存在し、

$$A^{-1}=|A|^{-1}\Delta^\mathsf{T}.$$

2017年05月31日 00:50 · Web · 0 · 1 · Webで開く

黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki on May 31
続き

A の第 $i_1,\dots,i_k$ 列のそれぞれを一斉に $e_{i_1},\dots,e_{i_k}$ で置き換えたものを $A^{i_1,\dots,i_k}$ と書く。行列 $xE+A$ の第 j 列は xe_j と A の第 j 列の和になる。行列式の多重線形性より、

$$\begin{aligned}&|xE+A|\\&=|A|\\&+\sum_{k=1}^n\left[\sum_{i_1<\dots<i_k}|A^{i_1,\dots,i_k}|\right]x^k.\end{aligned}$$

A を $-A$ で置き換えると

$$\begin{aligned}&|xE-A|\\&=(-1)^n|A|\\&+\sum_{k=1}^n(-1)^{n-k}\left[\sum_{i_1<\dots<i_k}|A^{i_1,\dots,i_k}|\right]x^k.\end{aligned}$$